

# Física 3

(Problemas - Parte 2)

Prof. Cayetano Di Bartolo Andara

Ultima actualización: Julio de 2004



Julio de 2004

Física-3 (Problemas - Parte 2)  
Prof. Cayetano Di Bartolo Andara  
Departamento de Física  
Universidad Simón Bolívar

Esta guía compuesta de dos partes contiene una serie de problemas adecuados para un curso de un trimestre de electrostática y magnetostática; al final de cada parte el lector encontrará las respuestas a los problemas propuestos. Muchos de los problemas aquí presentados han aparecido a lo largo de los años en los exámenes de Física-3 en la Universidad Simón Bolívar o son modificaciones de estos últimos. La guía se mantiene en construcción y si el lector tiene observaciones que hacer o desea contribuir a la misma, por favor, no dude en escribirme a mi dirección [dibarto@usb.ve](mailto:dibarto@usb.ve)

#### AGRADECIMIENTOS

La guía se realiza con la inestimable colaboración de mi esposa Jacqueline Geille Sarthou, quien me ayuda en muchas etapas de su elaboración.

#### **Instrucciones para las preguntas de selección**

★ Cuando lo necesite use para la permitividad en el vacío el valor numérico

$$\epsilon_0 \approx 9 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

y para la constante eléctrica

$$k_e \equiv 1/4\pi\epsilon_0 \approx 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

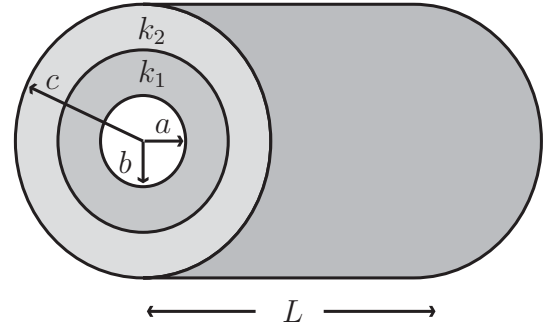
# Contenido

<b>6</b>	<b>Dieléctricos.</b>	<b>4</b>
<b>7</b>	<b>Densidad de Corriente y circuitos</b>	<b>7</b>
<b>8</b>	<b>Campo Magnético</b>	<b>10</b>
<b>9</b>	<b>Respuestas</b>	<b>13</b>
9.1	Dieléctricos. . . . .	13
9.2	Densidad de Corriente y circuitos. . . . .	15
9.3	Campo Magnético. . . . .	17

## —Tema 6—

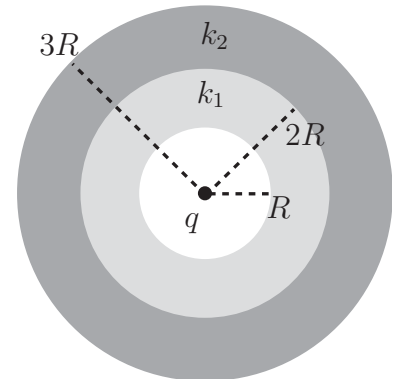
### Dieléctricos.

1. La figura muestra un capacitor que está hecho de dos cilindros conductores coaxiales de radios  $a$  y  $c$  y longitud  $L$ , siendo  $a < c \ll L$ . La región entre los radios  $a$  y  $b$  está ocupada por un dieléctrico de constante  $k_1$  mientras que la región entre los radios  $b$  y  $c$  la ocupa otro de constante dieléctrica  $k_2$ . Suponga que en el conductor cilíndrico interno se coloca carga uniformemente distribuida con una densidad longitudinal de carga  $\lambda$ .



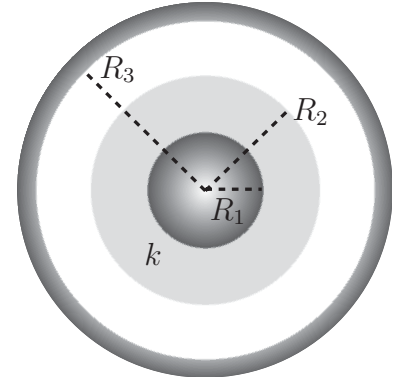
- Determine los campos eléctricos  $\mathbf{E}_1$  y  $\mathbf{E}_2$  establecidos en cada uno de los dos dieléctricos, en función de la distancia radial  $\rho$  al eje de simetría.
- Determine la diferencia de potencial entre los dos cilindros conductores.
- Halle la capacitancia.
- Halle la energía almacenada en el condensador.

2. La figura muestra un corte de un sistema formado por dos dieléctricos y una carga puntual  $q$ . Los dieléctricos de constantes  $k_1$  y  $k_2$  poseen cada uno carga neta nula y tienen forma de coronas esféricas concéntricas. La carga puntual se encuentra en el centro de los dieléctricos.



- Halle el campo eléctrico del sistema.
- Para cada dieléctrico determine su carga depositada en sus superficies interna y externa.

3. La figura muestra un capacitor formado por una esfera conductora de radio  $R_1 = R$  y un cascarón esférico, conductor, concéntrico y de radio interno  $R_3 = 3R$ . La región, en el interior del capacitor, comprendida entre los radios  $R_1$  y  $R_2 = 2R$  se encuentra ocupada por un material de constante dieléctrica  $k$ . La placa conductora de radio  $R_1$  posee una carga  $Q$  mientras que la carga neta del dieléctrico es nula.

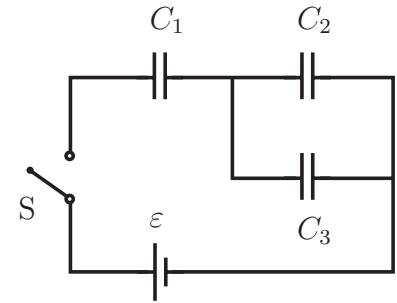


- Halle el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  para  $R_1 < |\mathbf{r}| < R_3$ .
- Calcule la diferencia de potencial entre las placas del condensador.
- Tome  $k = 3$ ,  $R = 3$  cm y la constante eléctrica  $1/(4\pi\epsilon_0) \approx 9 \times 10^9$  Nm<sup>2</sup>/C<sup>2</sup>. Determine la capacidad del condensador en picofaradios.

4. Los condensadores en el circuito de la figura son idénticos  $C_1 = C_2 = C_3 = C$  y están descargados.

a. Se cierra el interruptor S para que los condensadores se carguen y luego se vuelve a abrir el interruptor. Halle la carga de cada condensador.

b. A continuación se introducen dos dieléctricos de constante  $k$  que llenan completamente el interior de los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ , esto se hace cuidando de no agregar o quitar carga al circuito. Determine la nueva carga de cada condensador (el interruptor se mantiene abierto).

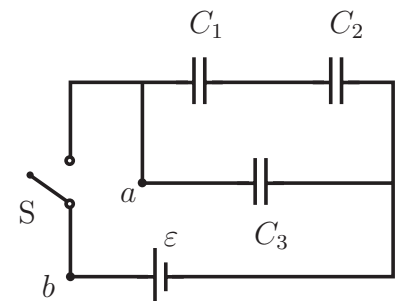


c. Tome  $k = 2$ ,  $\epsilon = 9$  v,  $C = 5 \mu\text{F}$  y determine el trabajo realizado por el agente externo al introducir los dieléctricos.

5. Los condensadores en el circuito de la figura son idénticos  $C_1 = C_2 = C_3 = C$  y están descargados.

a. Se cierra el interruptor S para que los condensadores se carguen y luego se vuelve a abrir el interruptor. Halle la carga de cada condensador.

b. A continuación se introduce un dieléctrico de constante  $k$  que llena completamente el interior del condensador  $C_1$ , esto se hace cuidando de no agregar o quitar carga al circuito. Determine la nueva carga de cada condensador (el interruptor se mantiene abierto).



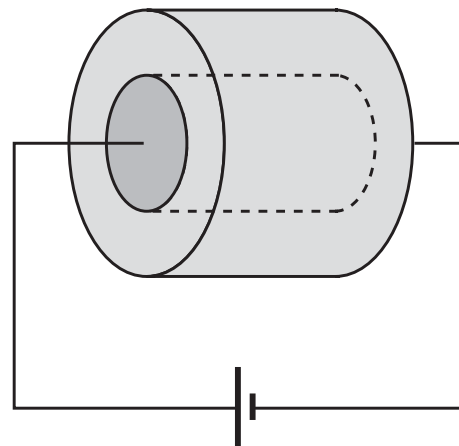
c. Tome  $k = 2$ ,  $\varepsilon = 10$  v y determine la diferencia de potencial  $v_a - v_b$  luego de introducir el dieléctrico.

---

## —Tema 7—

# Densidad de Corriente y circuitos

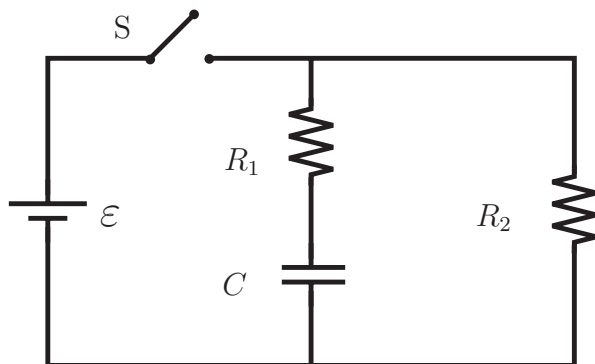
1. La figura muestra una batería conectada a una combinación de dos resistores cilíndricos coaxiales. El radio exterior es el doble del interior y la resistividad de la resistencia exterior también es el doble de la interior. Si  $R_1$  es la resistencia del resistor interno halle la resistencia del resistor externo y la resistencia total de los dos resistores.



2. Se tiene una batería de fuerza electromotriz  $\varepsilon$ , dos resistencias  $R_1$  y  $R_2$  y un condensador de capacidad  $C$  conectados en la forma que muestra la figura. Inicialmente, el interruptor  $S$  está abierto y el condensador está descargado. Se cierra el interruptor.

a. Determine en función del tiempo la carga en el condensador, la corriente que pasa por  $R_1$ , la corriente que pasa por  $R_2$  y la corriente que pasa por la batería.

b. Calcule la energía disipada en la resistencia  $R_1$  desde que se cierra el interruptor hasta que ha transcurrido un tiempo igual a  $2R_1C$ .



3. En el circuito mostrado el interruptor S ha estado cerrado durante un tiempo muy largo, de forma tal que el capacitor se encuentra completamente cargado. En el instante  $t = 0$  se abre el interruptor S. Son conocidos  $\varepsilon$ ,  $C$  y el valor  $R$  de las tres resistencias idénticas ( $R = R_1 = R_2 = R_3$ ).

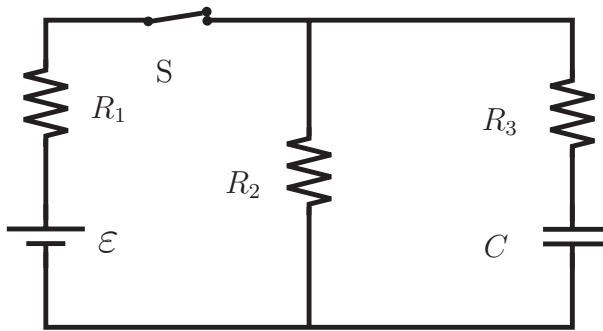
a. Para el instante justo antes de abrir el interruptor determine:

a1. la corriente en cada resistencia.

a2. la carga del capacitor.

b. Determine la corriente en la resistencia  $R_2$  en función del tiempo para  $t > 0$ .

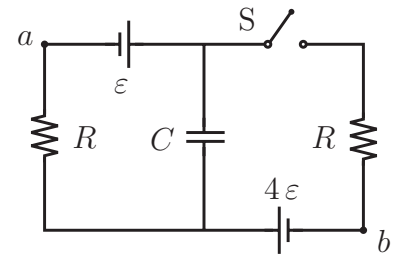
c. Grafique la corriente en la resistencia  $R_2$  en función del tiempo para  $t > 0$ .



4. El interruptor S de la figura lleva mucho tiempo abierto y se cierra en  $t = 0$ .

a. Halle la carga del condensador justo antes de cerrar S (instante  $t = 0^-$ ).

b. Señale en el circuito el sentido de las corrientes que elija para cada rama y a cuál placa del condensador le asignará la carga  $Q(t)$ . Escriba el sistema de ecuaciones completo que satisfacen las corrientes del circuito y la carga del condensador para  $t \geq 0$ . No resuelva todavía las ecuaciones.



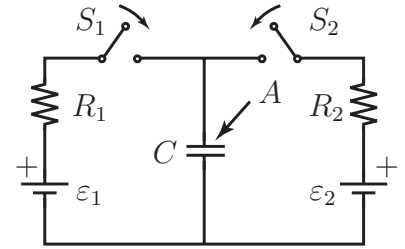
c. Resuelva el sistema de ecuaciones y halle, para todo tiempo  $t \geq 0$ , la carga del condensador.

d. Halle la diferencia de potencial  $V_a - V_b$  en el instante  $t = CR \ln(5)$ .



5. Para el circuito de la figura son conocidos los valores de los voltajes de las pilas, las resistencias y la capacidad del condensador. Suponga que la placa  $A$  del condensador posee inicialmente una carga conocida  $Q_0$ .

En el instante  $t = 0$  se cierran simultáneamente los dos interruptores  $S_1$  y  $S_2$ .



a. Señale en el circuito el sentido de las corrientes que elija para cada rama y a cuál placa del condensador le asignará la carga  $Q(t)$ . Escriba el sistema de ecuaciones completo que satisfacen las corrientes del circuito y la carga del condensador, incluya la condición inicial para la carga del condensador. No resuelva todavía las ecuaciones.

b. Tome  $R_1 = R$ ,  $R_2 = 2R$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 = 4\varepsilon$  y  $Q_0 = -\varepsilon C$ . Calcule en función del tiempo, para  $t > 0$ , las corrientes y la carga  $Q(t)$ .

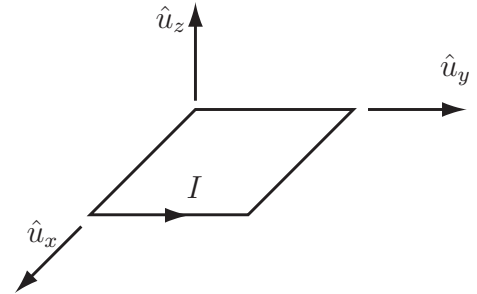
c. En el instante  $t = 1$  s se abre el interruptor  $S_1$  y se deja cerrado  $S_2$ . Si se espera mucho tiempo ¿cuál será la carga final del condensador y cuál de sus dos placas será la positiva?

**Nota:** Esta parte del problema puede responderse independientemente de las anteriores.

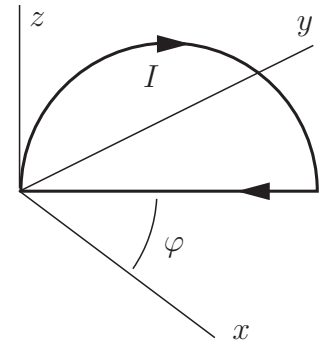
—Tema 8—

# Campo Magnético

1. La espira de la figura es cuadrada de lado  $L$ , se encuentra en el plano  $xy$  y lleva una corriente  $I$  en el sentido indicado. En la región existe un campo magnético uniforme  $\mathbf{B} = B\hat{u}_y$ . Halle el torque magnético sobre la espira.

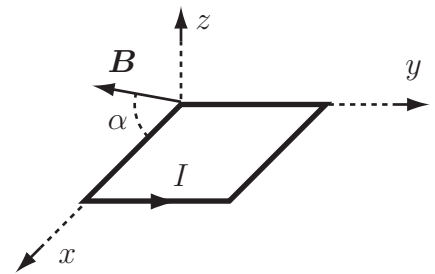


2. La figura muestra una espira de corriente  $I$  formada por un tramo recto y un tramo semicircular de radio  $R$ . El plano de la espira es perpendicular al plano  $xy$  y forma un ángulo  $\varphi$  con el plano  $xz$ . En la región existe un campo magnético uniforme y estacionario dado por  $\mathbf{B} = B\hat{u}_y$ .



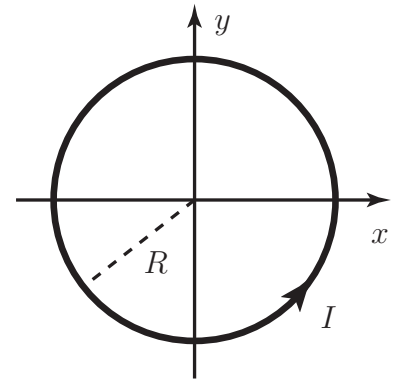
- Halle el torque magnético sobre la espira.
- Halle la fuerza magnética sobre el tramo semicircular.

3. La figura muestra una espira cuadrada de lado  $L$ , que se encuentra en el plano  $xy$  y lleva una corriente  $I$  en el sentido indicado. En la región existe un campo magnético externo  $\mathbf{B}$ , uniforme, de módulo  $B$ , perpendicular al eje  $y$  y que forma un ángulo  $\alpha$  con el eje  $x$ .



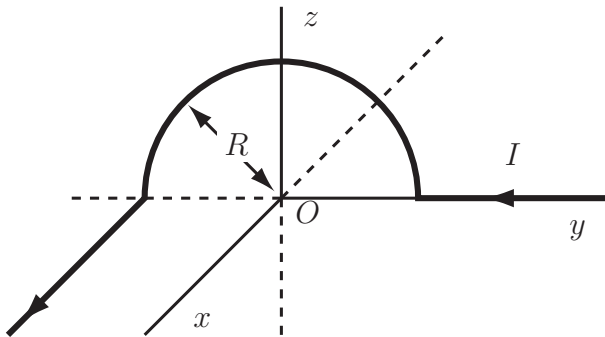
- Calcule el vector fuerza que el campo externo aplica al lado de la espira que se encuentra sobre el eje  $x$ .
- Encuentre el vector momento dipolar magnético de la espira.
- Halle el vector torque que el campo magnético externo le aplica a la espira.

4. La figura muestra una espira circular de radio  $R$ , que se encuentra en el plano  $xy$  y lleva una corriente  $I$  en el sentido indicado. El eje  $z$  se dirige hacia el lector. En la región existe un campo magnético externo y uniforme  $\mathbf{B} = B \mathbf{j}$ .



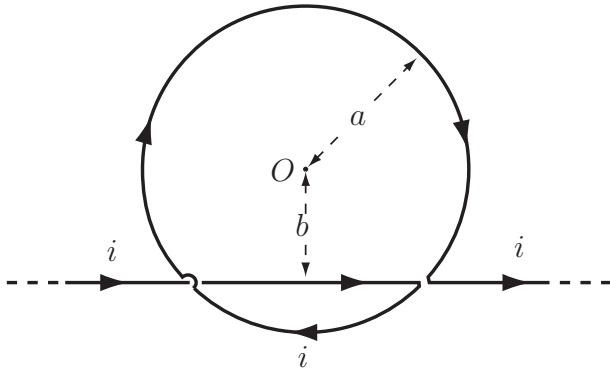
- Halle el vector torque que el campo magnético externo le aplica a la espira completa.
- Calcule el vector fuerza magnética que el campo externo le aplica al trozo semicircular superior de la espira (aquel cuyos puntos tienen coordenada  $y \geq 0$ ).

5. Se tiene un alambre conductor infinito doblado en 3 secciones como se muestra en la figura. Una sección del alambre está sobre el eje  $y$ , seguida por una sección semicircular de radio  $R$  contenida en el plano  $yz$  y cuyo centro coincide con el origen de coordenadas  $O$ . A continuación, una tercera sección del alambre es paralela al eje  $x$ . Si por el alambre circula una corriente igual a  $I$ , encuentre el vector campo magnético en el punto  $O$ .

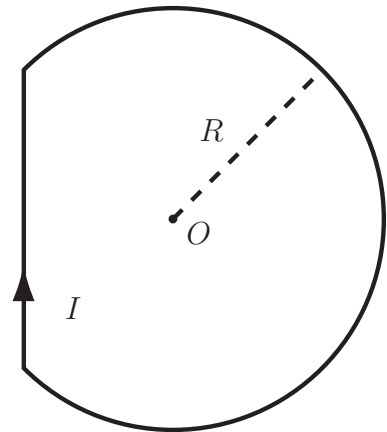


6

- Halle la expresión para el campo magnético producido en el centro de una espira circular de radio  $a$  que lleva una corriente  $i$ .
- Halle la expresión para el campo magnético producido a una distancia  $b$  perpendicular a un alambre recto y muy largo que lleva una corriente  $i$ .
- Un alambre muy largo que lleva una corriente  $i$  está doblado de forma tal que tiene una parte circular de radio  $a$  y dos secciones rectas alineadas, como se muestra en la figura. Si el campo magnético es nulo en el centro  $O$  del círculo, ¿cuánto vale el cociente  $a/b$ ?



7. La espira conductora de la figura lleva una corriente  $I$  y está formada por un tramo recto y  $3/4$  de una circunferencia de radio  $R$  y origen  $O$ . Elija (y dibuje) un sistema de coordenadas y halle el campo magnético que produce esta espira en el punto  $O$ .



# —Respuestas 9—

## 9.1 Dieléctricos.

---

1.

a. 
$$\mathbf{E}_1 = \frac{\lambda \hat{u}_\rho}{2\pi\epsilon_0\rho k_1} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\lambda \hat{u}_\rho}{2\pi\epsilon_0\rho k_2}$$

b. 
$$v_a - v_c = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{\ln(b/a)}{k_1} + \frac{\ln(c/b)}{k_2} \right)$$

c. 
$$c = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\frac{\ln(b/a)}{k_1} + \frac{\ln(c/b)}{k_2}}$$

d. 
$$U = \frac{\lambda^2 L}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\ln(b/a)}{k_1} + \frac{\ln(c/b)}{k_2} \right)$$

---

2.

a. Definimos  $\hat{r} = \mathbf{r}/r$ .

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } r \in (0, R_1) \cup (R_3, \infty), \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 k_1 r^2} \hat{r} & \text{si } r \in (R_1, R_2), \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 k_2 r^2} \hat{r} & \text{si } r \in (R_2, R_3). \end{cases}$$

b. Para el dieléctrico de constante  $k_1$  llamaremos  $Q_{R_1}$  y  $Q_{R_2^-}$  a sus cargas en las superficies  $r = R_1$  y  $r = R_2$ . Para el dieléctrico de constante  $k_2$  llamaremos  $Q_{R_2^+}$  y  $Q_{R_3}$  a sus cargas en las superficies  $r = R_2$  y  $r = R_3$ .

$$Q_{R_2^-} = -Q_{R_1} = q \left( 1 - \frac{1}{k_1} \right), \quad Q_{R_3} = -Q_{R_2^+} = q \left( 1 - \frac{1}{k_2} \right).$$

---

3.

a.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 k r^2} \hat{u}_r & \text{si } R_1 < r < R_2, \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r & \text{si } R_2 < r < R_3. \end{cases}$$

b. 
$$V(R_1) - V(R_3) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \left( \frac{1}{2k} + \frac{1}{6} \right).$$

c. 
$$C = 10 \text{ pF.}$$

---

4.

a. Llamaremos  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  a las cargas en las placas izquierdas de los condensadores.

$$Q_1 = \frac{2C\epsilon}{3}, \quad Q_2 = Q_3 = \frac{C\epsilon}{3}$$

b. Llamaremos  $Q'_1$ ,  $Q'_2$  y  $Q'_3$  a las cargas en las placas izquierdas de los condensadores luego de introducir los dieléctricos.

$$Q'_1 = \frac{2C\epsilon}{3}, \quad Q'_2 = \frac{2kC\epsilon}{3(k+1)}, \quad Q'_3 = \frac{2C\epsilon}{3(k+1)}.$$

c. 
$$W_{\text{externo}} = -6 \times 10^{-5} \text{ Joul.}$$

---

5.

a. Llamaremos  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$  a las cargas en las placas izquierdas de los condensadores.

$$Q_1 = Q_2 = \frac{C\epsilon}{2}, \quad Q_3 = C\epsilon.$$

b. Llamaremos  $Q'_1$ ,  $Q'_2$  y  $Q'_3$  a las cargas en las placas izquierdas de los condensadores luego de introducir los dieléctricos.

$$Q'_1 = Q'_2 = \frac{3kC\epsilon}{2(1+2k)}, \quad Q'_3 = \frac{3(1+k)C\epsilon}{2(1+2k)}.$$

c. 
$$V_a - V_b = -1 \text{ voltio.}$$

---

## 9.2 Densidad de Corriente y circuitos.

$$1. \quad R_1 = \frac{\rho_1 L}{\pi a^2} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{(2\rho_1)L}{\pi(4a^2 - a^2)} \quad \text{por lo cual} \quad R_2 = \frac{2}{3}R_1.$$

Las dos resistencias están en paralelo ya que la diferencia de potencial entre sus extremos es la misma y la corriente se divide en dos (una parte pasa por  $R_1$  y otra por  $R_2$ ). Luego

$$R = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1} = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{3}{2R_1} \right)^{-1} = \frac{2R_1}{5}$$

$$2. \quad Q = \varepsilon C (1 - e^{-t/CR_1}) \quad (\text{placa superior}) \quad I_{R1} = \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-t/CR_1} \quad (\text{bajando})$$

$$I_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{R_2} + \frac{\varepsilon}{R_1} e^{-t/CR_1} \quad (\text{subiendo}) \quad I_{R2} = \frac{\varepsilon}{R_2} \quad (\text{bajando})$$

$$E = \frac{\varepsilon^2 C}{2} (1 - e^{-4})$$

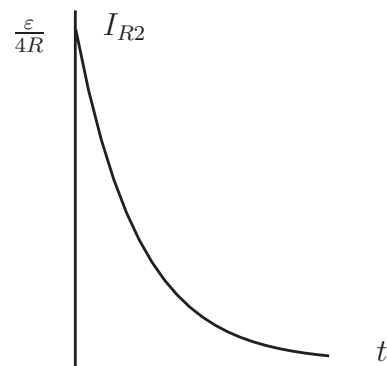
3. Tomaremos subiendo a  $I_{R1}$  y bajando a  $I_{R2}$  e  $I_{R3}$ . La carga en la placa superior es  $Q$ .

$$a. \quad I_{R1} = I_{R2} = \frac{\varepsilon}{2R}, \quad I_{R3} = 0, \quad Q = \frac{\varepsilon C}{2}$$

b. y c.

$$Q = \frac{\varepsilon C}{2} \exp\left(\frac{-t}{2CR}\right)$$

$$I_{R2} = \frac{\varepsilon}{4R} \exp\left(\frac{-t}{2CR}\right)$$



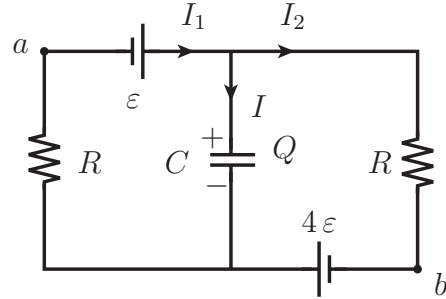
4.

a. La carga en la placa superior es  $Q = \varepsilon C$ .

b. En el dibujo se muestran los nombres asignados a las corrientes y cargas.

$$\frac{Q}{C} - \varepsilon + I_1 R = 0, \quad \frac{Q}{C} - I_2 R + 4\varepsilon = 0$$

$$I_1 = I + I_2, \quad \frac{dQ}{dt} = I, \quad Q(0) = \varepsilon C$$



c. 
$$Q(t) = -\frac{3\varepsilon C}{2} + \frac{5\varepsilon C}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{con} \quad \tau \equiv \frac{CR}{2}$$

d. 
$$V_a - V_b = \frac{8}{5} \varepsilon$$

Nota: El valor de las corrientes para  $t > 0$  es

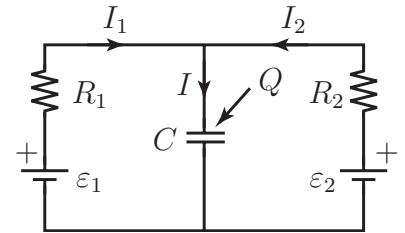
$$I_1(t) = \frac{5\varepsilon}{2R} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right], \quad I(t) = -\frac{5\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad I_2(t) = \frac{5\varepsilon}{2R} \left[ 1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]$$

5. La carga del condensador y las corrientes en las ramas del circuito se toman como muestra la figura.

a.

$$0 = \frac{Q}{C} + I_1 R_1 - \varepsilon_1, \quad I = I_1 + I_2,$$

$$0 = \frac{Q}{C} + I_2 R_2 - \varepsilon_2, \quad I = \frac{dQ}{dt}, \quad Q(0) = Q_0.$$



b.

$$Q = 2\varepsilon C - 3\varepsilon C \exp\left(-\frac{3t}{2CR}\right), \quad I_1 = -\frac{\varepsilon}{R} + \frac{3\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{3t}{2CR}\right),$$

$$I = \frac{9\varepsilon}{2R} \exp\left(-\frac{3t}{2CR}\right), \quad I_2 = +\frac{\varepsilon}{R} + \frac{3\varepsilon}{2R} \exp\left(-\frac{3t}{2CR}\right).$$

c. La placa A será la positiva con una carga  $Q = \varepsilon_2 C = 4\varepsilon C$ .



### 9.3 Campo Magnético.

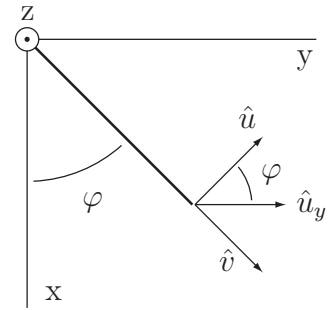
1. 
$$\mathbf{T} = \mathbf{M} \times \mathbf{B} = (IL^2 \hat{u}_z) \times (B \hat{u}_y) = -IL^2 B \hat{u}_x$$

2. a.  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M} \times \mathbf{B}$  con  $\mathbf{M} = I \left( \frac{\pi R^2}{2} \right) \hat{u}$  luego

$$\boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{2} I \pi R^2 B \text{sen}(\varphi) \hat{u}_z$$

b.  $\mathbf{F} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B}$  con  $\mathbf{L} = 2R \hat{v}$  luego

$$\mathbf{F} = 2RIB \cos \varphi \hat{u}_z$$



3.

a) 
$$\mathbf{F} = I \int d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I(L\mathbf{i}) \times \mathbf{B} = -ILB \text{sen}(\alpha) \mathbf{j}.$$

b) 
$$\mathbf{M} = I \int d\mathbf{s} = IL^2 \mathbf{k}.$$

c) 
$$\mathbf{T} = \mathbf{M} \times \mathbf{B} = IL^2 B \cos(\alpha) \mathbf{j}.$$

4.

a) 
$$\boldsymbol{\tau} = I \int \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = \mathbf{M} \times \mathbf{B} = (I\pi R^2 \mathbf{k}) \times (B\mathbf{j}) = -I\pi R^2 B \mathbf{i}$$

b) 
$$\mathbf{F} = I \int (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = I\mathbf{D} \times \mathbf{B} = I(-2R\mathbf{i}) \times (B\mathbf{j}) = -2IRB \mathbf{k}$$

5. Llamaremos 1 al tramo sobre el eje  $y$ , 2 al curvo y 3 al tramo paralelo al eje  $x$ .

$$\mathbf{B}_1 = 0 \quad \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 I \hat{u}_x}{4R} \quad \mathbf{B}_3 = \frac{\mu_0 I \hat{u}_z}{4\pi R} \quad \mathbf{B}_{\text{Total}} = \frac{\mu_0 I}{4R} \left( \hat{u}_x + \frac{\hat{u}_z}{\pi} \right)$$

6. Llamaremos  $\hat{u}$  al vector unitario que sale de la página.

a. Para la circunferencia del dibujo,

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0 i}{2a} \hat{u}$$

b. Para el hilo recto de longitud infinita del dibujo,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi b} \hat{u}$$

c.

$$\frac{a}{b} = \pi$$

---

7. Llamaremos  $\hat{u}$  al vector unitario que entra al papel.

$$\mathbf{B}_{\text{curvo}} = \frac{3\mu_0 I \hat{u}}{8R} \quad \mathbf{B}_{\text{recto}} = \frac{\mu_0 I \hat{u}}{2\pi R} \quad \mathbf{B}_{\text{Total}} = \frac{\mu_0 I \hat{u}}{R} \left( \frac{1}{2\pi} + \frac{3}{8} \right)$$

---